**Nociones de Lógica Proposicional**

El objeto de estudio de la **lógica proposicional** son los métodos para distinguir el razonamiento válido del incorrecto. Esto nos interesa debido que el estudio de las Matemáticas exige razonar en forma válida acerca de objetos abstractos. Una aproximación al lenguaje formal, es posible mediante el uso adecuado de los elementos de la **lógica proposicional** que nos permite introducir símbolos y conectivos para construir expresiones formales con estructura lógica válida, que descarte las contingencias y aporte economía del pensamiento.

**Proposiciones**

Consideremos las siguientes oraciones:

a) ¡Corre! b) 2 es número primo.

De la primera no se puede decir si es verdadera o falsa, ya que una es imperativa; en cambio (b) es verdadera.

***Proposición*** *es una expresión declarativa con sentido en un lenguaje, que afirma o niega algo, proporciona una información, y se caracteriza por el hecho de ser verdadera o falsa.*

Para denotar proposiciones se utilizan letras: p , q , r , ...

Por ejemplo: p = Posadas es capital de Misiones.

q = 5 es menor que 3.

La veracidad o falsedad de un enunciado se le denomina ***valor de verdad*** o *valor lógico*, de la proposición y se simboliza mediante “*V*” .

De los ejemplos, tenemos: *V*(p) = V y *V*(q) = F

Responda: ¿Los siguientes enunciados son proposiciones? En el caso de serlo, indicar el valor de verdad de cada una de ellas.

a) 5 es número par. Proposición V(p) = F

b) ¿llueve? No es una proposición.

c) Los triángulos equiláteros no tienen tres lados congruentes. Proposición falsa.

d) 2 + 2 = 3 proposición falsa.

e) Cierre la puerta, por favor. No es una proposición.

2 es un número primo y es un número natural. Proposición compuesta. Debido a la presencia del nexo lógico “y”. proposición verdadera.

V ∧ V

2 es un número impar y es primo. Proposición falsa

F ∧ V

**Conectivos o Nexos Lógicos**

*Los* ***conectivos lógicos*** *son elementos que se usan para enlazar varias proposiciones o para modificar el valor de verdad de una proposición.*

****

****

Un recurso para determinar los estados de verdad y falsedad de proposiciones compuestas son las **tablas de verdad** donde se vuelcan todas las posibilidades de valor de verdad de las proposiciones simples la componen puesto que el valor de verdad de una proposición compuesta depende del valor de verdad de las mismas.

Responda: En las siguientes proposiciones compuestas, identificar a las proposiciones simples que la componen y luego escribirlas en forma simbólica.

a) Está lloviendo y no está lloviendo.

b) Está lloviendo o no está lloviendo.

c) 1 no es mayor a 2 y es impar.

d) Hace calor y hay humedad, entonces va a llover.

e) Dos números son positivos sí y solo si su producto es positivo.

**Negación**

La negación de una proposición **p** es otra proposición ~**p** que niega lo que afirma **p**, o viceversa. La negación cambia el valor de verdad de la proposición original.

Se representa por ~**p** y se lee **“no p”.**

**Tabla de Verdad de la Negación**

|  |  |
| --- | --- |
| **p** | **~p** |
| **V** | **F** |
| **F** | **V** |

Por ejemplo: q = *5 es un número impar*

~q = *5 no es un número impar* o bien

~q = *no es cierto que 5 sea un número impar* o bien

~q = *5 es un número par*

Observación: La negación de “el mar es azul” es “el mar no es azul”, decir “el mar es verde” no es la negación de la primera, sino una nueva proposición.

**Conjunción**

Dos proposiciones pueden combinarse por medio de la “y” para conformar una proposición compuesta que se denomina la conjunción de las proposiciones originales.

En símbolos **p ∧ q** que se lee “ **p y q** ”

Ejemplo: “yo canto y bailo”

p = yo canto ,… q = yo bailo , p ∧ q = yo canto y bailo.

¿Cuántas posibilidades de acción se puede dar? Analiza el valor de verdad de relacionándola al cumplimiento de la acción. Confecciona la tabla de verdad para la conjunción, a partir de lo analizado.

**Tabla de Verdad de la Conjunción**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **p ∧ q** |
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **F** |
| **F** | **F** | **F** |

Nota: la conjunción es verdadera únicamente cuando las proposiciones simples que la conforman son verdaderas, en cualquier otro caso la conjunción es falsa.

1° PROPOSICIÓN 2° PROPOSICIÓN

V VV

V

F VF

V FV

F

F FF

2 X 2 = 4

P q r

2 . 2 . 2 = 8 =

**Disyunción incluyente**

Dos proposiciones pueden combinarse por medio de la “o” (en el sentido de “y / o”) conformando una proposición compuesta denominada disyunción incluyente o simplemente disyunción de las proposiciones originales.

En símbolos **p ∨ q** que se lee “ **p o q** ”

Ejemplo: Lizy dice “compartiré mis apuntes o los libros que ya no utilice”

p = compartiré mis apuntes q = compartiré libros que ya no utilice.

p ∨ q = compartiré mis apuntes o libros que ya no utilice.

**Tabla de Verdad de la disyunción incluyente**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **p ∨ q** |
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **F** |

Nota: la disyunción es falsa únicamente cuando las proposiciones simples son simultáneamente falsas, en cualquier otro caso es verdadera.

**Disyunción excluyente**

Dos proposiciones cualesquiera pueden combinarse por medio de la “o” para conformar una nueva proposición que se denomina disyunción excluyente o diferencia simétrica de las proposiciones originales.

En símbolos **p ∨ q** que se lee “**p o q pero no las dos**”

Ejemplo: Estoy en la facultad o en casa.

p = estoy en la facultad q = estoy en casa

p ∨ q = estoy en la facultad o estoy en casa.

**Tabla de Verdad de la disyunción excluyente**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **p ∨ q** |
| **V** | **V** | **F** |
| **V** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **F** |

La disyunción excluyente es verdadera únicamente cuando las proposiciones originales tienen distintos los valores de verdad.

En el lenguaje coloquial la “o” no suele distinguirse como incluyente o excluyente, es común decir “p o q o ambas” como también “p o q pero no ambas”. En el lenguaje escrito para eliminar la ambigüedad se debe elegir el símbolo adecuado.

**Implicación o Condicional**

Dos proposiciones pueden combinarse por medio de **“si ..... , entonces....”** para conformar una nueva proposición que se denomina implicación.

En símbolos **p ⇒ q** que se lee “**si p, entonces q**”

También se puede leer:

“p implica q” , “p sólo si q” , “p es suficiente para q” o “q es necesario para p”

Ejemplo: p = hace buen tiempo q = salimos a caminar

p ⇒ q = si hace buen tiempo, entonces salimos a caminar.

**Tabla de Verdad de la implicación**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **p ⇒ q** |
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **V** |

Así, si no hace buen tiempo quedo librado del compromiso y, salgamos o no a caminar, la implicación será verdadera; ahora, si hace buen tiempo y salimos a caminar la implicación será verdadera porque se ha cumplido con el compromiso; si no salimos a caminar no cumpliríamos con el compromiso y la implicación sería falsa.

La proposición p se llama **antecedente** y q se llama **consecuente**, de la implicación.

*La implicación usual en matemática es* ***formal*** *en el sentido de que no es necesario que el consecuente se derive lógicamente de antecedente*; por ejemplo:

“Si apruebo matemáticas, entonces llueve”

*Cuando el consecuente deriva lógicamente del antecedente la implicación se llama* ***material*** *y queda incluida en la primera*; por ejemplo:

“Si un triángulo es equilátero, entonces es isósceles”

**Doble Implicación o Bicondicional**

Dos proposiciones pueden combinarse por medio de **”.... si y solo si ....”** conformando una nueva proposición que se denomina doble implicación.

En símbolos **p ⇔ q** que se lee “**p si y sólo si q**”

La doble implicación puede definirse como la conjunción de una implicación y su recíproca, es decir:

(p ⇔ q) ≡ (p ⇒ q) ∧ (q ⇒ p)

Ejemplo: El triángulo ABC es equilátero si y sólo si es equiángulo”.

p = ABC es equilátero q = ABC es equiángulo

p ⇔ q = un triángulo es equilátero si y sólo si es equiángulo.

**Tabla de Verdad de la doble implicación**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **p ⇔ q** |
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **F** |
| **F** | **F** | **V** |

Resaltamos que la doble implicación es verdadera solo cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

P: estudiar. ~ ( ~ p)

V

F

V

**Proposiciones y Tablas de Verdad**

Hemos visto que con el uso de conectivos lógicos ( ~ , ∧ , ∨ , ∨, ⇒ , ⇔) podemos elaborar a partir de proposiciones simples ( p, q, r, ...) proposiciones compuestas.

También que el valor de verdad de una proposición compuesta, depende exclusivamente de los valores de verdad de las proposiciones simples.

Si consideramos, por ejemplo, la proposición: ~ ( p ∧ ~ q )



Criterio para la construcción de la tabla:

En las primeras columnas ubicamos las proposiciones simples que intervienen.

El número de filas debe ser tal que permita todas las posibles combinaciones de V y F para estas proposiciones (para 2, como en este caso, se necesitan 4 filas; para 3 variables se necesitan 8 filas; y, en general, para n variables se necesitan líneas).

Para colocar ordenadamente todos los casos, en la primera columna pondremos la mitad de todos los casos posibles con V, y la otra con F, y en la segunda pondremos, alternativamente, V y F, en grupos mitad de la longitud de los grupos anteriores, y así sucesivamente.



**Construya** la tabla de verdad de ( p ⇒ ~ q ) ∨ r.

~ (p ∧ ~q)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ~ | ( p | ∧ | ~ | q ) |
| V | V | F | F | V |
| F | V | V | V | F |
| V | F | F | F | V |
| V | F | F | V | F |

( p ⇒ ~ q ) ∨ r

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (p | ⇒ | ~ | q) | ∨ | r |
| V | F | F | V | V | V |
| V | F | F | V | F | F |
| V | V | V | F | V | V |
| V | V | V | F | V | F |
| F | V | F | V | V | V |
| F | V | F | V | V | F |
| F | V | V | F | V | V |
| F | V | V | F | V | F |

**Funciones Proposicionales y su cuantificación**

**Función o Esquema Proposicional**

Para hacer referencia a una propiedad o característica general de un conjunto, en matemática, se utilizan expresiones de la forma P(x), llamadas ***predicados***, referidas a un elemento indeterminado perteneciente a un conjunto.

Así, a todo elemento ***x*** de un conjunto se puede asociar un predicado P(x), el cual tomará uno u otro valor de verdad, dependiendo de ***x***.

Ejemplo: para hacer referencia al conjunto de los números enteros (Z) impares, se escribe en forma simbólica:

P*(x):* x є Z , *x* es impar

Esta expresión no es una proposición, pues no es posible determinar la verdad o falsedad del enunciado, a menos que otorguemos un valor a x.

P (2) : 2 es impar **F** P (3) : 3 es impar **V**

Para cada valor dado a x , se tendrá una proposición. A expresiones de este tipo se las llama *Funciones* o *Esquemas Proposicionales.*

***Función proposicional*** *en una variable* ***x,*** *es toda oración en la que figura* ***x*** *como sujeto, la cual se convierte en proposición al especificar* ***x.***

Existen funciones proposicionales con dos indeterminadas. Por ejemplo, en el conjunto de los Naturales (N), la función:

P (x , y): x es divisor de y

Esta función proposicional pasa a ser proposición cuando se particularizan los valores de x e y.

P (2 , 6): 2 es divisor de 6 **V** P (5 , 12): 5 es divisor de 12 **F**

Responder: Si es posible, asignar a las variables que aparecen en las siguientes expresiones un valor real de modo que resulten proposiciones verdaderas.



**Cuantificadores**

Si P(x) es una función proposicional definida sobre un conjunto, entonces P(x) puede ser V para todos los elementos del conjunto, para algunos o para ninguno de ellos.

Por ejemplo:

Si **para todo x, se verifica P(x)** se denota mediante  **∀ x : P(x)**

En cambio

Si **existe x, tal que se verifica P(x)** se denota mediante  **∃ x / P(x)**

El símbolo ∀ se llama cuantificador universal y ∃ se llama cuantificador existencial.

**La función proposicional cuantificada adquiere el carácter de proposición.** La primera se convierte en una proposición por *generalización*; la segunda, se convierte en una proposición por *particularización*.

Por ejemplo:

(1)“Todos los números enteros son pares” se escribe ∀ x є Z : x es par

(2) “Existen enteros negativos” se escribe ∃ x є Z / x ˂ 0

Responder: Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones y expresarlas coloquialmente.

